Esercizio 9

Calcolare il flusso del rotore del campo

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = y\,\overrightarrow{i}_1 + 2z\,\overrightarrow{i}_2 + 3x\,\overrightarrow{i}_3$$

attraverso la superficie

$$\mathcal{S}: \quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

Usando la formula di Stokes:

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{F}) \cdot \overrightarrow{n}\, \mathrm{d}S = \oint_{\Gamma=\partial\mathcal{S}} \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\Gamma$$

osservo che Γ è

$$\Gamma: \; x^2+y^2+0^2 = x^2+y^2 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\overrightarrow{r}(t) = \cos(t)\,\overrightarrow{i}_1 + \sin(t)\,\overrightarrow{i}_2 + 0\,\overrightarrow{i}_3, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\Downarrow$$

$$\overrightarrow{r}'(t) = -\sin(t)\,\overrightarrow{i}_1 + \cos(t)\,\overrightarrow{i}_2 + 0\,\overrightarrow{i}_3, \; t \in [0, 2\pi]$$

Quindi

$$\int_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{F}) \cdot \overrightarrow{n}\, \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)\, \mathrm{d}t$$

$$= -\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\, \mathrm{d}t = \ldots = -\pi$$

Esercizio: calcolare direttamente

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{F}) \cdot \overrightarrow{n}\, \mathrm{d}S$$